2006/2007 НАВЧАЛЬНИЙ РІК

6 клас

1. Відповідь. 31 учень.

2. Якби всі хлопчики знайшли різну кількість грибів, то всього було б $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9$ (грибів). Отже, один із доданків необхідно зменшити на 1, що фактично означає існування двох хлопчиків з однаковою кількістю грибів.

Якби всі знайшли менше двох грибів, то всього було б не більше п'яти грибів. Отже, хтось із хлопчиків повинен знайти не менше двох грибів.

3. Якщо додати всі числа у рядках, то вийде додатне число, а якщо у стовпчиках, то від'ємне. Сума чисел у таблиці не може бути різною, адже від перестановки доданків сума не змінюється.

Відповідь. Ні, не можна.

4. Якщо квадрат деякого натурального числа ділиться на 3, то він ділитиметься і на 9. Число, яке містить лише три одиниці, а решта — нулі, ділиться на 3, але не ділиться на 9. Отже, дане число не є квадратом.

5. Зі слів Вінні-Пуха випливає, що відстань від першої до третьої сосни така сама, як від четвертої до шостої. Тоді зі слів Кролика та П'ятачка випливає, що відстань від першої сосни до другої така сама, як від п'ятої до шостої.

Отже, Іа-Іа помилився.

7 клас

1. Див. розв'язання задачі 1 для 6-го класу.

2. Див. розв'язання задачі 3 для 6-го класу.

3. Див. розв'язання задачі 4 для 6-го класу.

4. Доведемо, що $n\left(n^2+5\right)$ ділиться на 2 і на 3.

Якщо $n=2k$, то $n\left(n^2+5\right)$ ділиться на 2.

Якщо $n=2k+1$, то $n^2+5=(2k+1)^2+5=4k^2+4k+6$ ділиться на 2.

Отже, $n\left(n^2+5\right)$ ділиться на 2.

Якщо $n=3k$, то $n\left(n^2+5\right)$ ділиться на 3.

Якщо $n=3k+1$, то $n^2+5=(3k+1)^2+5=9k^2+6k+6$ ділиться на 3.

Якщо $n=3k+2$, то $n^2+5=(3k+2)^2+5=9k^2+12k+9$ ділиться на 3.

Отже, $n\left(n^2+5\right)$ ділиться на 3.

Якщо число ділиться і на 2 і на 3, то воно ділиться на 6.

5. Спочатку потрібно кинути горіх з 4-го поверху. Можливі два випадки.

1) Горіх розбився. Далі перевірити, кидаючи горіх з першого, другого та третього поверхів.

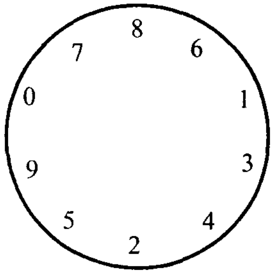
2) Горіх не розбився. Кидаємо його з 7-го поверху. Знову маємо два випадки.

2.1) Горіх розбився. Починаємо перевіряти, кидаючи його з 5-го, а потім з 6-го поверхів.

2.2) Горіх не розбився. Кидаємо його з 9-го поверху. Якщо горіх розбився, то кидаємо з 8-го, якщо ні, то — з 10-го поверху.

8 клас

1. Відповідь. Див. мал. 42.

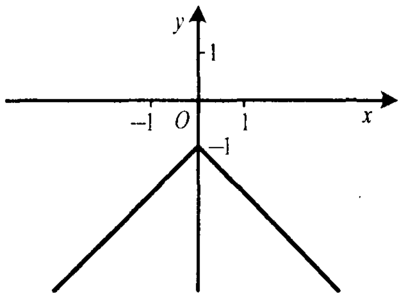


Мал. 42

2. Виділимо повні квадрати: $x^2+2x+1+y^2+4y+4=0$,

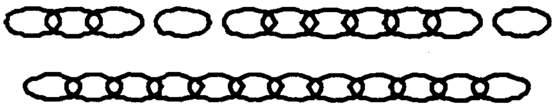
$(x+1)^2+(y+2)^2=0$.

Рівність можлива, коли обидва квадрати дорівнюють 0.
Відповідь. $(-1;-2)$.
3. Відповідь. Див. мал. 43.



Мал. 43

4. Див. розв'язання задачі 4 для 7-го класу.
5. Слід розкувати четверте і одинадцяте кільця (мал. 44).



Мал. 44

Матимемо «важки» масою: 1 г, 1 г, 3 г, 6 г, 12 г.

Відповідь. 2 кільця.

9 клас

1. Зробимо заміну змінної. Нехай $x+\frac{1}{x}=t$, тоді $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Матимемо:

$$7t-2\left(t^2-2\right)=9,$$

$$2t^2-7t+5=0,$$

$$t_1=1,\ t_2=2{,}5.$$

Повертаючись до змінної x, матимемо:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=0,\\ x^2-2{,}5x+1=0.\end{array}\right.$$

Відповідь. 0,5; 2.

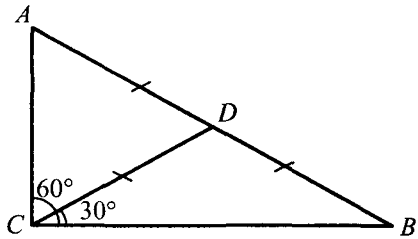
2. Помножимо дану нерівність на 2 та перенесемо всі доданки у праву частину нерівності:

$$2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b=$$

$$=a^2-2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1=$$

$$=(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0.$$

3. Нехай ΔABC прямокутний з прямим кутом C (мал. 45). Медіана $CD=m$, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи, тоді $AB=2m$. Оскільки прямий кут поділено у відношенні 1 : 2, то $\angle ACD=60°=\angle CAD$, $\angle BCD=30°=\angle CBD$.



Мал. 45

$$S_{ABC} = 2S_{ADC} = \frac{CD^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}m^2}{2}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}m^2}{2}$.

4. Див. розв'язання задачі 4 для 7-го класу.

5. Див. розв'язання задачі 5 для 8-го класу.

10 клас

1. Див. розв'язання задачі 1 для 9-го класу.

2. Див. розв'язання задачі 2 для 9-го класу.

3. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ x^2 - 2x - 1 = 0; \end{cases}$$

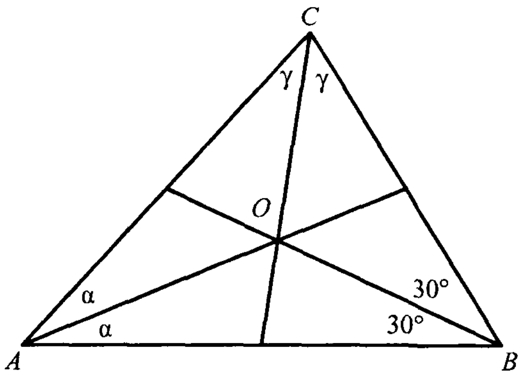
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 2, \\ x \geq 3, \end{array}\right. \\ x = 1 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь. $2, 3, 1-\sqrt{2}$.

4. Позначимо $\angle CAO = \angle BAO = \alpha$, $\angle ACO = \angle BCO = \gamma$ (мал. 46).

$2\alpha + 2\gamma = 180° - 60° = 120°$. Отже, $\alpha + \gamma = 60°$.

$\angle DOE = \angle AOC = 180° - (\alpha + \gamma) = 120°$. Отже, навколо чотирикутника $BDOE$ можна описати коло. Оскільки $\angle DOB = \angle BOE$, то рівні дуги, на які спираються ці кути, а отже, рівні і хорди, що стягують ці дуги. Тобто $OD = OE$.



Мал. 46

5. Нехай $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ — числа, написані на картках. Пронумеруємо клітинки таблиці (мал. 47).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Мал. 47

Якщо $a_1 + a_9 > a_2 + a_8$, то перший ставить число a_9 на клітинку 2, а другий його хід — число a_2 або a_1 на одну з клітинок 4 або 6. Якщо $a_1 + a_9 < a_2 + a_8$, то перший ставить число a_1 на клітинку 4, а другий його хід — число a_9 або a_8 на одну з клітинок 2 або 8. Якщо $a_1 + a_9 = a_2 + a_8$, можна використовувати будь-яку з цих стратегій.

11 клас

1. Зведемо дане рівняння до квадратного. Маємо:

$$1 + 4\cos x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$2\cos^2 x - 4\cos x - 2 = 0,$$

$$\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0,$$

$$\cos x = 1 - \sqrt{2},$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь. $\pm\left(\pi - \arccos\left(\sqrt{2} - 1\right)\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2. Див. розв'язання задачі 3 для 10-го класу.
3. Див. розв'язання задачі 4 для 10-го класу.
4. Оцінимо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 =$$

$$= a(b-c)^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - a^3 - b^3 - c^3 =$$

$$= a(b-c)^2 - a^3 + bc(b+c) + a^2(b+c) - \left(b^3 + c^3\right) =$$

$$= a(b-c-a)(b-c+a) + (b+c)\left(a^2 - (b-c)^2\right) =$$

$$= a(b-c-a)(b-c+a) + (b+c)(a-b+c)(a+b-c) =$$

$$= (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0.$$

Оскільки a, b, c — сторони трикутника, то вирази в дужках додатні.
5. Див. розв'язання задачі 5 для 10-го класу