2007/2008 НАВЧАЛЬНИЙ РІК

6 клас

1. Див. відповідь до задачі 1 для 6-го класу (2006/2007 н. р.).

2. Позначимо всі груші через x. За умовою задачі складемо рівняння і розв'яжемо його:

$$\frac{x}{2}+5+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-5\right)+5=x,$$

$$x+20+\left(\frac{x}{2}-5\right)=2x,$$

$\frac{x}{2}=15,\ x=30.$

Відповідь. 30.

3. Однією цифрою пронумеровано 9 сторінок, двома цифрами — 90 сторінок, трьома — 900 сторінок. Всього будемо мати

$$9+90\cdot 2+900\cdot 3=2889 \text{ (цифр)}.$$

Залишається ще 500 цифр, використаних для запису чотирицифрового номера сторінки. Таких сторінок $500:4=125$.

Отже, у науковій роботі $9+90+900+125=1124$ (сторінки).

Відповідь. 1124.

4. За умовою задачі доріг має бути $\frac{5\cdot 3}{2}=7,5$.

Відповідь. Ні.

7 клас

1. Див. відповідь до задачі 1 для 6-го класу (2006/2007 н. р.).

2. Див. розв'язання задачі 2 для 6-го класу.

3. Число 899 єдиним чином розкладається на два множники більші за 1: $899=29\cdot 31$.

Відповідь. 29.

4. Якщо всі числа стануть рівними, їх сума буде парним числом, а спочатку сума була непарною і, збільшуючись за кожний крок на 2, залишається непарною.

Відповідь. Ні.

5. Позначимо кількість хлопавок у Тигри через x, у Кролика через y, у всіх інших мешканців Лісу — через z. За умовою задачі складемо систему:

$$\begin{cases} x+y+z=55, \\ \frac{z}{2}+y=10y, \\ x\ge 2,\ \ y\ge 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=55, \\ z=18y, \\ x\ge 2,\ \ y\ge 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+19y=55, \\ z=18y, \\ x\ge 2,\ \ y\ge 2. \end{cases}$$

Рівняння $x+19y=55$ має єдиний розв'язок, що задовольняє умову задачі: $x=17, y=2$.

Відповідь. 17.

8 клас

1. Див. відповідь до задачі 1 для 6-го класу (2006/2007 н. р.).

2. Щоб розв'язати задачу, складемо рівняння $x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$. Звідки $x = 3$.

Відповідь. Три кошеняти.

3. Сума двох невід'ємних чисел дорівнює нулю лише за умови, що обидва доданки дорівнюють нулю.

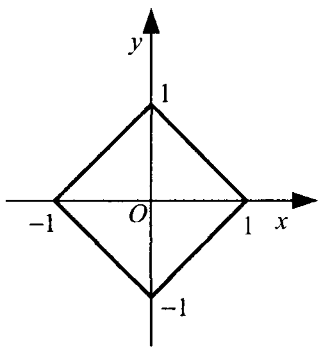
Відповідь. 1.

4. Див. розв'язання задачі 4 для 7-го класу.

5. Див. розв'язання задачі 5 для 8-го класу (2001/2002 н. р.)

9 клас

1. Відповідь. Див. мал. 48



Мал. 48

2. Перший не може бути лицарем. Отже, жителів більше трьох і не всі вони брехуни. Другий — лицар. Отже, на острові четверо людей. Третій — брехун. Отже, на острові не більше двох брехунів і оскільки перший та третій брехуни, то брехунів два.

Відповідь. Четверо людей, два брехуни.

3. Позначимо $x + y = a$, $xy = b$. Матимемо:

$$\begin{cases} a + b = 11, \\ a^2 - b = 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b=11, \\ a^2+a-30=0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-6, \\ b=17, \end{cases} \\ \begin{cases} a=5, \\ b=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

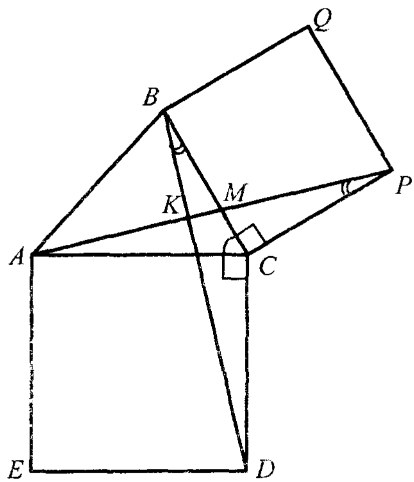
Повернемося до змінних x та y:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=-6, \\ xy=17, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5, \\ xy=6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Перша система сукупності не має розв'язку. З другої системи отримуємо дві пари чисел: (2; 3), (3; 2).

Відповідь. (2; 3), (3; 2).

4. $\Delta APC = \Delta DBC$ ($AC = DC$, $PC = BC$, $\angle ACP = \angle DCB$ (мал. 49).



Мал. 49

Отже, $AP = BD$.

Оскільки $\Delta KBM \sim \Delta CPM$ (за двома кутами), то

$$\angle BKM = \angle PCM = 90^\circ .$$

Отже, $AP \perp BD$.

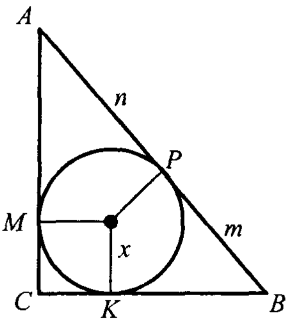
5. Див. розв'язання задачі 5 для 8-го класу.

10 клас

1. Див. розв'язання задачі 1 для 9-го класу.

2. Див. розв'язання задачі 2 для 9-го класу.

3. Позначимо радіус вписаного у трикутник кола через x (мал. 50).



Мал. 50

За властивостями дотичних і теоремою Піфагора матимемо:

$$(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2 ,$$

$$x^2 + x(m+n) - mn = 0 .$$

Площу даного трикутника можна визначити за формулою:

$$S = \frac{1}{2}(x+m)(x+n) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x(m+n) + mn\right),$$

де $x^2 + x(m+n) = mn$.

Отже, $S = mn$.

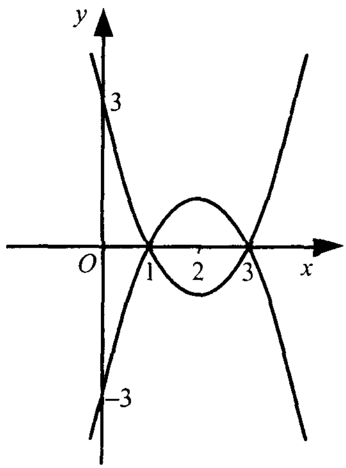
Відповідь. mn .

4. Див. розв'язання задачі 3 для 9-го класу (2004/2005 н.р.)

5. Оскільки серед кожних шести учасників є двоє однакового віку, то всі учасники належать не більше ніж до п'яти вікових категорій. Тому за принципом Діріхле знайдеться хоча б 41 учасник однакового віку. За тим самим принципом Діріхле серед 41 учасника знайдеться хоча б 9 з однієї країни, а серед 9 осіб є принаймні 5 однієї статі.

11 клас

1. Відповідь. Див мал. 51.



Мал. 51

2. Якщо квадратний тричлен має корінь $1-\sqrt{3}$, то він також матиме корінь $1+\sqrt{3}$. Використовуючи теорему Вієта, матимемо:

$$x^2-\left(\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\right)x+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=x^2-2x-2.$$

Відповідь. x^2-2x-2.

3. Див. розв'язання задачі 3 для 10-го класу.

4. Див. розв'язання задачі 3 для 9-го класу (2004/2005 н.р.).

5. Див. розв'язання задачі 5 для 10-го класу.