2006/2007 НАВЧАЛЬНИЙ РІК

6 клас

1. Під час ранкової зарядки учні вишикувалися в шеренгу по одному з інтервалом 1 м. Довжина шеренги 30 м. Скільки учнів було на зарядці?

2. П'ять хлопчиків знайшли 9 грибів. Довести, що хоча б двоє з них знайшли грибів порівну. Довести, що серед них є хлопчик, який знайшов не менше 2 грибів.

3. Чи можна розставити числа в квадратній таблиці 5×5 так, щоб сума чисел у кожному рядку була додатною, а в кожному стовпчику від'ємною?

4. Довести, що число, в десятковому запису якого є лише три одиниці та кілька нулів, не є квадратом.

5. Вінні-Пух, П'ятачок, Кролик та ослик Іа-Іа пішли гуляти до Шести Сосен, які ростуть уздовж прямої стежки (у порядку зростання номерів). Вінні-Пух знайшов, що відстань від першої сосни до четвертої така сама, як від третьої до шостої. Кролик сказав, що третя сосна у три рази далі від першої, ніж друга. П'ятачок помітив, що від п'ятої сосни до четвертої вдвічі далі, ніж до шостої. А Іа-Іа заявив, що відстань від першої сосни до другої більша, ніж від п'ятої до шостої, на половину довжини його хвоста. Довести, що хтось із них помилився.

7 клас

1. Див. задачу 1 для 6-го класу.

2. Див. задачу 3 для 6-го класу.

3. Див. задачу 4 для 6-го класу.

4. Довести, що при будь-якому натуральному n сума n^3+5n ділиться націло на 6.

5. Коли мавпа несла три однакові кокосові горіхи на вершину багатоповерхового дерева, один горіх упав з 11-го поверху і розбився. Мавпа хоче визначити найвищий поверх, при падінні з якого кокосові горіхи не розбиваються. Вона може впустити горіх з будь-якого поверху і підібрати його, якщо він цілий. Довести, що їй вистачить чотирьох спроб (з двома горіхами).

8 клас

1. Записати цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по колу так, щоб із будь-яких трьох, узятих підряд цифр, сума якихось двох сусідніх ділилася на 7.

2. Розв'язати рівняння $x^2+2x+y^2+4y+5=0$.

3. Побудувати множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння $|x|+y+1=0$.

4. Див. задачу 4 для 7-го класу.

5. Є ланцюг, що складається з 23 кілець. Кожне кільце має масу рівно 1 г. Яку найменшу кількість кілець достатньо розкувати, щоб із них та частинок ланцюга, що утворилися, можна було утворити будь-яку масу: 1 г, 2 г, ..., 23 г. (Вважається, що розковані кільця також мають масу по 1 г.)

9 клас

1. Розв'язати рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=9$.

2. Довести нерівність $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$.

3. У прямокутному трикутнику медіана дорівнює m і ділить прямий кут у відношенні $1:2$. Знайти площу трикутника.

4. Див. задачу 4 для 7-го класу.

5. Див. задачу 5 для 8-го класу.

10 клас

1. Див. задачу 1 для 9-го класу.

2. Див. задачу 2 для 9-го класу.

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-5x+6}\left(x^2-2x-1\right)=0$.

4. У трикутнику *ABC*, у якого $\angle B = 60°$, провели бісектриси *AD* і *CE*, що перетинаються в точці *O*. Довести, що *OD* = *OE*.

5. Є дошка розміром 3×3 клітинки і 9 карток розміром в одну клітинку, на яких написано деякі числа. Двоє гравців по черзі кладуть ці картки на клітинки дошки, по одній на клітинку. Після того як картки розкладено, перший (той, хто починав) підраховує суму шести чисел, що стоять у верхньому та нижньому рядках. Другий підраховує суму шести чисел, що стоять у лівому та правому стовпчиках. Виграє той, у кого сума більша. Довести, що при правильній грі першого другий не зможе виграти незалежно від того, які числа написані на картках.

11 клас

1. Розв'язати рівняння $1+4\cos x=\cos 2x$.

2. Див. задачу 3 для 10-го класу.

3. Див. задачу 4 для 10-го класу.

4. Довести нерівність:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3,$$

де *a*, *b*, *c* — довжини сторін трикутника.

5. Див. задачу 5 для 10-го класу.

5[131]